Z205. Wykazać, że relecja $\overline{Q}$ z poprzedniego zadania[1] jest przechodnim domknieciem relacji Q.

Niech $\overline{Q}$ będzie dowolną relacją. Wykorzystując zalozenia zadania[1] wiemy, że $\overline{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$ oraz $\mathrm{Q}^1 = Q$ i $\mathrm{Q}^{n+1} = Q^n Q$ dla $\mathrm{n} \geqslant 1$. Relacja $\overline{Q}$ ma następujące własnosci: jest przechodnia oraz $\mathrm{Q} \subseteq \overline{Q}$. Chcemy pokazać, że $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^+$. Na mocy zasady ekstencjonalności zbiory $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}^+$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Q} \subseteq Q^+$ i $\mathrm{Q} \supseteq Q^+$. Gdzie Q^+ jest przechodnim domknięciem relacjii Q.

Pokażemy teraz, że $\mathrm{Q} \subseteq Q^+$.
Wiemy, że $\mathrm{Q} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{Q}$, z czego wynika, że Q^+ jest zawarte we wszystkich relacjach przechodnich w Q. Stąd mamy $\mathrm{Q} \subseteq Q^+$.

Chcemy pokazać, że $\mathrm{Q} \supseteq Q^+$.

Lemat 1 *Dla dowolnej relacji S i S^+, jeżeli $S \subseteq S^+$ oraz S^+ jest relacją przechodnią to dla każdego n mamy $S^n \subseteq S^+$.*

Dowód indukcyjny Lematu 1:
Dla n=1 mamy $S^1 \subseteq S^+$ co jest prawdziwe z naszego założenia.
Pokażemy teraz, że jesli dla każdego $\mathrm{n} \leqslant n_0$ zachodzi $\mathrm{S}^n \subseteq S^+$ to $\mathrm{S}^{n_0+1} \subseteq S^+$. $< a, b > \in S^{n_0+1} \Leftrightarrow < a, b > \in S^n S \Leftrightarrow \exists c. < a, c > \in S \wedge < c, b > \in S^n$ co z założenia indukcyjnego implikuje $\exists c. < a, c > \in S^+ \wedge < a, c > \in S^+$ co z przechodzniości relacji S^+ jest równoważne $< a, b > \in S^+$, co kończy dowód.

Relacja Q^+ jest przechodnim domknięciem relacji Q, więc spełnia warunki Lematu 1. Stąd dla każdego n mamy $Q^n \subseteq Q^+$, zatem $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n \subseteq Q^+$. Z założenia zadania mamy $\overline{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$ zatem $\mathrm{Q} \supseteq Q^+$

Pokazaliśmy, że $\mathrm{Q} \subseteq Q^+$ i $\mathrm{Q} \supseteq Q^+$ zatem $Q^+ = \overline{Q}$ co kończy dowód.

Fabian Król
14.11.2007
4/5

[1] Z204. Niech $\mathrm{Q} \subseteq A^2$ bedzie dowolna relacja, $\mathrm{Q}^1 = Q$ i niech $\mathrm{Q}^{n+1} = Q^n Q$ dla $\mathrm{n} \geqslant 1$. Kładziemy $\overline{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$. Wykaż, że $\overline{Q}$ jest relacją przechodnią.