Z195. Udowocnić, że dla dowolnych zniorów A i B równość.. $A{\times}B = B{\times}A$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$ lub $A = B$.

Załóżmy, że $A{\times}B = B{\times}A$. Należy rozpatrzeć przypadki:

1. Chcemy pokazać, że $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$.
   Niech $A{\times}B = \emptyset$ wtedy nie istnieje element należący do A lub należący do B. Stąd mamy $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$. Gdyby oba zbiory były niepuste to istniloby $a \in A$ i $b \in B$, stąd $< a, b >\in A \times B$, czyli $A \times B \neq \emptyset$ co daje sprzeczność.

2. Chcemy pokazać, że $A = B$.
   Niech $A \times B \neq \emptyset$ wtedy $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$ więc istnieją $a \in A$ i $b \in B$. Weśmy dowlne a i b takie, że $< a, b >\in A \times B$. Wtedy z równości $A{\times}B = B{\times}A$ wynika $< a, b >\in B \times A$. Stąd mamy $a \in B$ i $b \in A$, więc $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$ więc $A = B$.

Załóżmy teraz, że $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$ lub $A = B$. Należy rozpatrzeć przypadki:

1. Jeżeli $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$ wtedy $A \times B = \emptyset$ i $B \times A = \emptyset$, stąd $A{\times}B = B{\times}A$.

2. Jeżeli $A = B$. Weśmy dowolne $a \in A$ i $b \in B$ wtedy $< a, b >\in B \times A$. Z równości $A = B$ mamy $a \in B$ i $b \in A$ stąd $< a, b >\in A \times B$ oraz $< a, b >\in B \times A$, co dowodzi równości $A{\times}B = B{\times}A$.

Zatem udowodniliśmy, że dla dowolnych zbiorów A i B równość $A{\times}B = B{\times}A$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$ lub $A = B$.

Fabian Król
7.11.2007
5/5